

Problema 20

Para un **dipolo**

- a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio
- b) Repetir a) considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo
- c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas
- d) Dibujar líneas de campo eléctrico representativas del problema
- e) Dibujar líneas equipotenciales representativas del problema
- f) Calcular el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A – ubicado sobre la recta que une ambas cargas, a otro punto B – ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas

Problema 20

Distribución discreta de cargas

- Ley de Coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

\vec{r} = Punto campo: donde quiero calcular el campo

\vec{r}_j = Punto fuente j : donde está la carga q_j

Diferencia de potencial V

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

q_o = Carga puntual

\vec{r}_f = Posición Final

\vec{r}_i = Posición Inicial

$$W_{\vec{r}_f, \vec{r}_i} \Big|_{q_o} = q_o \left(V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) \right)$$

Problema 20

Caso elemental: carga puntual

$q = \text{Carga puntual fuente}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_B$$

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

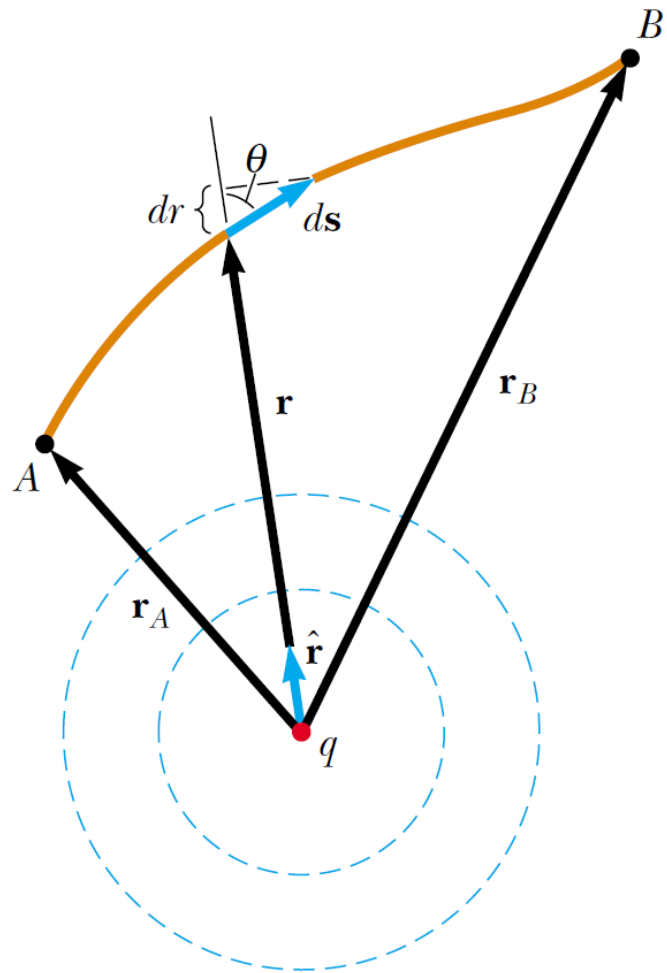
$$W_{\vec{r}_B, \vec{r}_A} \Big|_{q_o} = q_o (V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A))$$

CASO GENERAL !!!

Distribuciones de carga tanto acotadas como no acotadas

CARGAS ACOTADAS EN EL ESPACIO

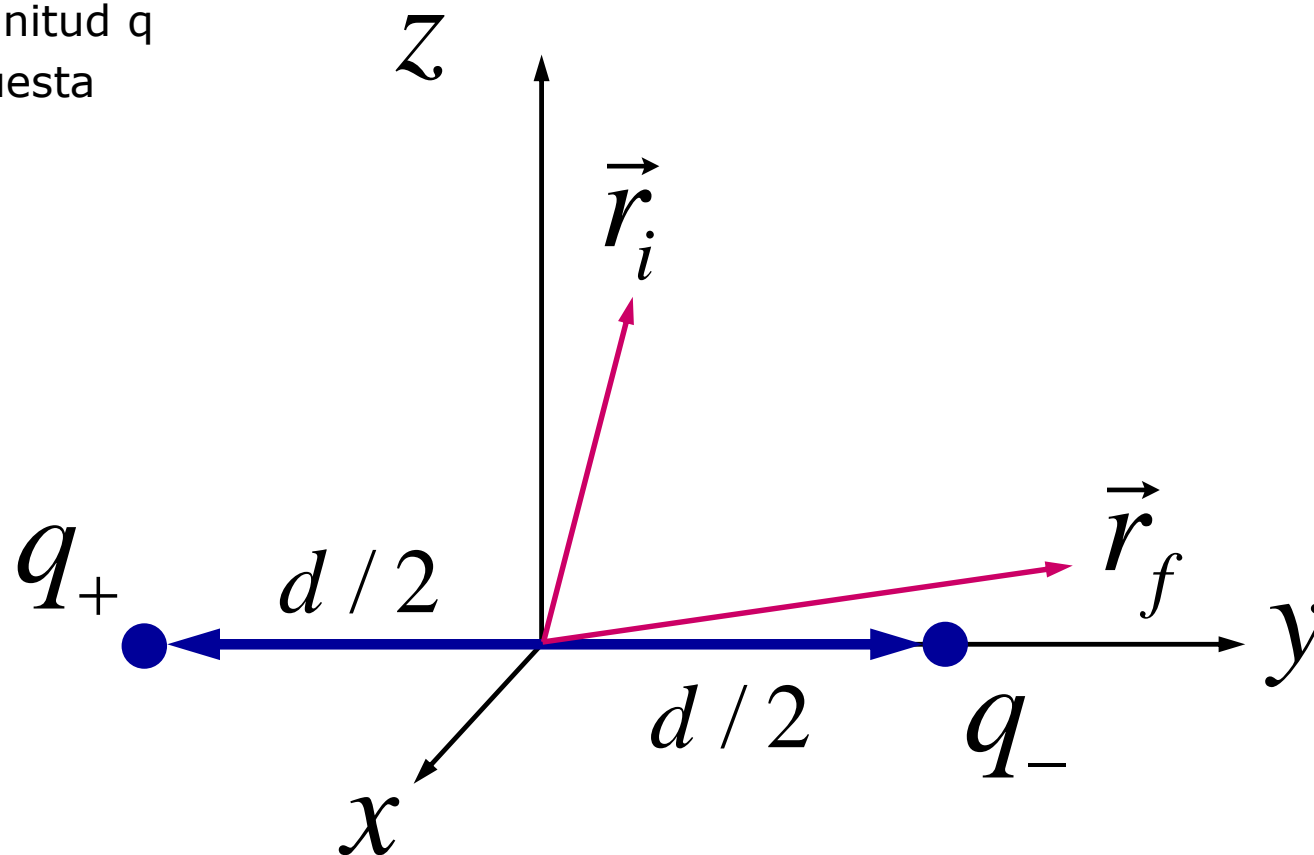
Calculo diferencia de potencial sin previo calculo campo eléctrico



Problema 20

Dipolo eléctrico

- Dos cargas
 - Igual magnitud q
 - Carga opuesta
 - d



Problema 20

Cargas acotadas en el espacio

- Cálculo de la diferencia de potencial
 - Ecuación (50) del apunte extendida para una distribución de n cargas

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_j|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right] \quad (1)$$

- En caso que se desee calcular las componentes del campo eléctrico
 - Ecuación (43) del apunte

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\text{grad}(V)$$

Problema 20

a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio

- Dipolo eléctrico

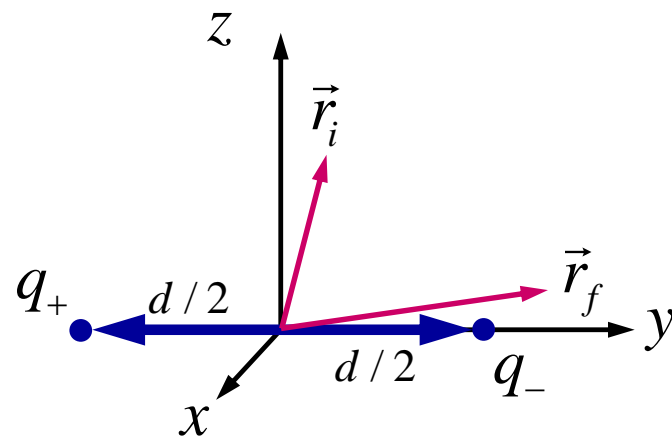
$$q_- = -q_+$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}|} \right) - \left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}|} \right) \right] \quad (2)$$

$$\vec{r}_{q+} = -\frac{d}{2} \hat{j}; \vec{r}_{q-} = \frac{d}{2} \hat{j}$$

$$\vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$



Problema 20

a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q+} = x_f \hat{i} + (y_f + y_{q+}) \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q-} = x_f \hat{i} + (y_f - y_{q-}) \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q+} = x_i \hat{i} + (y_i + y_{q+}) \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q-} = x_i \hat{i} + (y_i - y_{q-}) \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}| = \left[x_f^2 + (y_f - y_{q+})^2 + z_f^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}| = \left[x_i^2 + (y_i - y_{q+})^2 + z_i^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}| = \left[x_f^2 + (y_f - y_{q-})^2 + z_f^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}| = \left[x_i^2 + (y_i - y_{q-})^2 + z_i^2 \right]^{1/2}$$

Problema 20

b) Repetir considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo

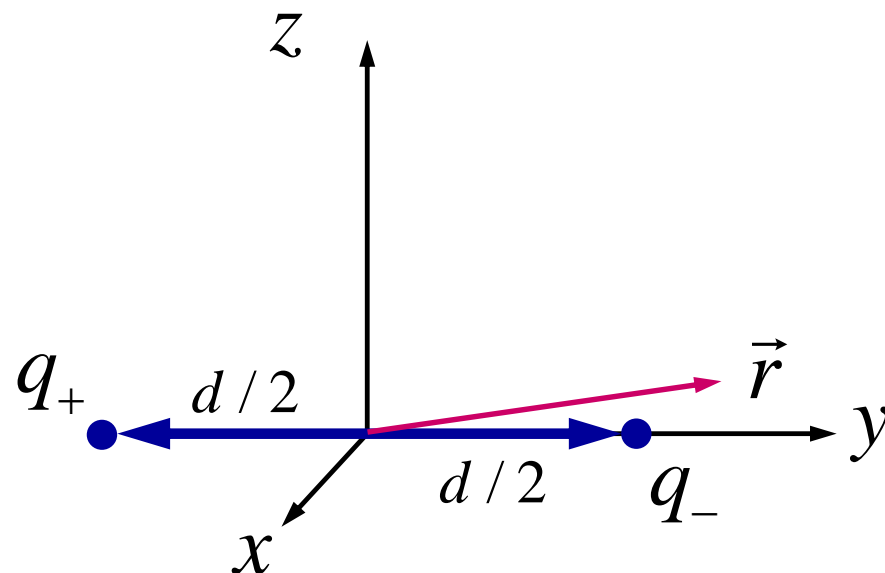
- Si asumimos que el punto inicial se encuentra muy lejos del dipolo,
 - Ecuación (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{q_+}|} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{q_-}|} \rightarrow 0$$

$$V_{Ref} = V(\vec{r}_i) = 0$$

$$\vec{r}_f = \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$V(\vec{r}_f) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{q_+}|} + \frac{q_-}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{q_-}|} \quad (3)$$

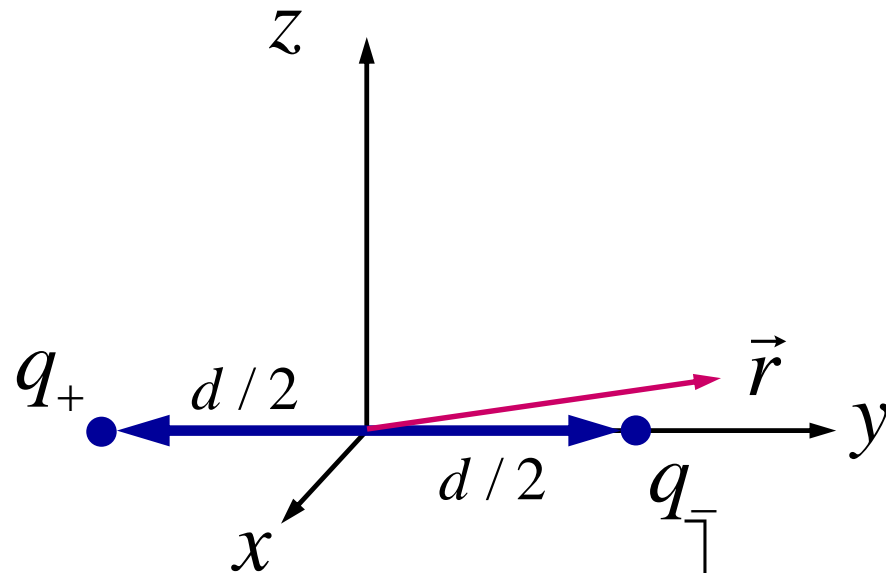


Problema 20

b) Repetir considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo

$$|\vec{r} - \vec{r}_{q_+}| = \left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_{q_-}| = \left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



$$V(\vec{r}) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4)$$

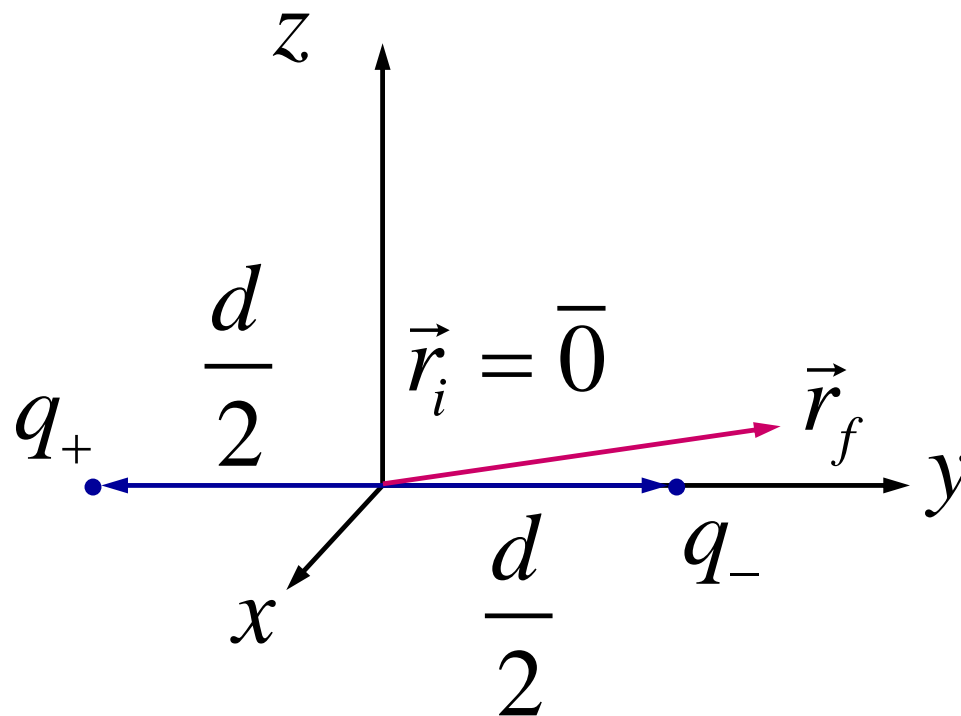
Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

- Si asumimos que el punto inicial se encuentra en el origen

$$\vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_i = \vec{0}$$



Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q+} = x_f \hat{i} + (y_f + d/2) \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q-} = x_f \hat{i} + (y_f - d/2) \hat{j} + z_f \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q+} = d/2 \hat{j}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q-} = -d/2 \hat{j}$$

$$|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}| = \left[x_f^2 + (y_f + d/2)^2 + z_f^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}| = \left[(d/2)^2 \right]^{1/2} = d/2$$

$$|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}| = \left[x_f^2 + (y_f - d/2)^2 + z_f^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}| = \left[(-d/2)^2 \right]^{1/2} = d/2$$

Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i = 0) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\frac{d}{2}} \right] - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\frac{d}{2}}$$

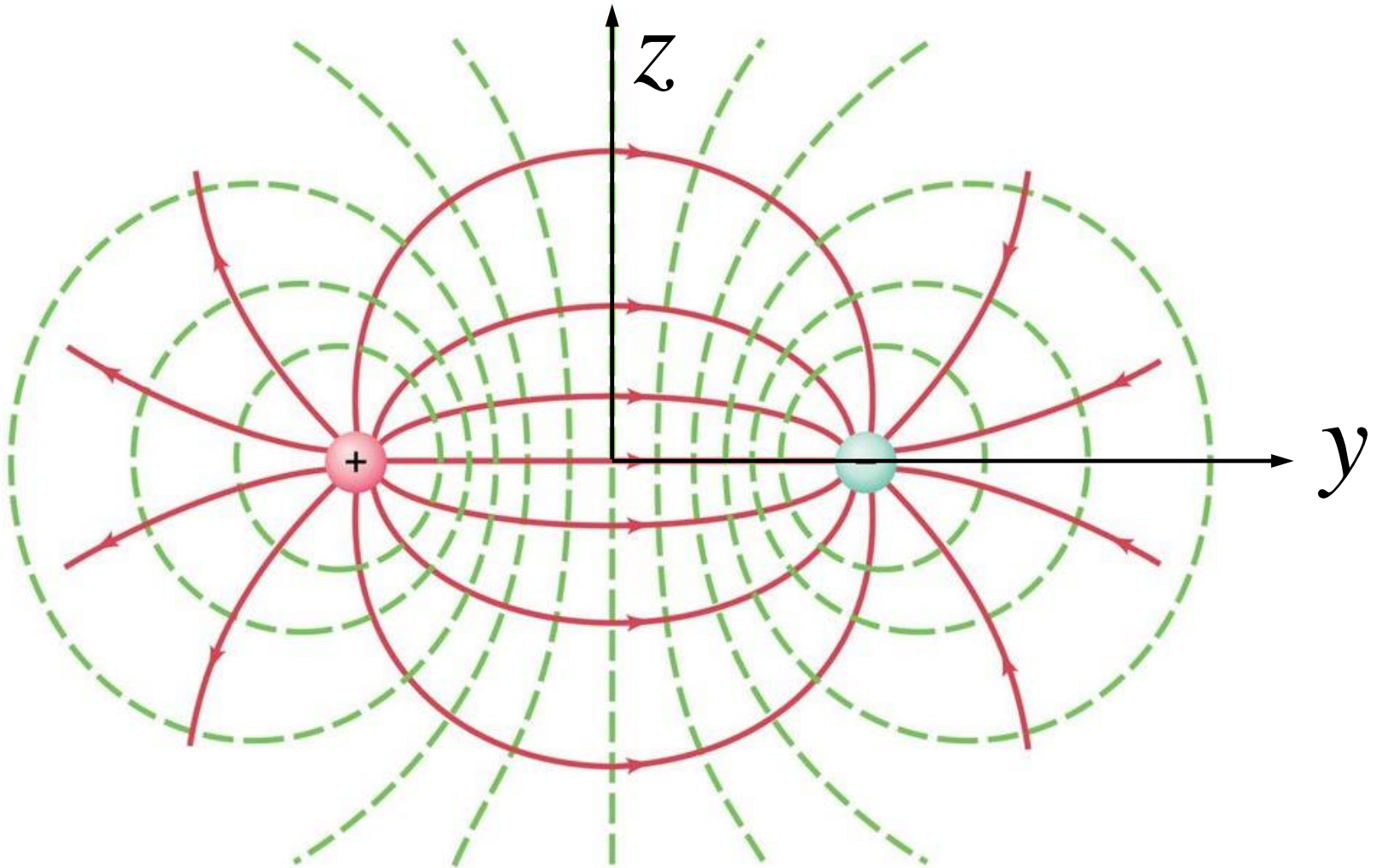
Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i = 0) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (5)$$

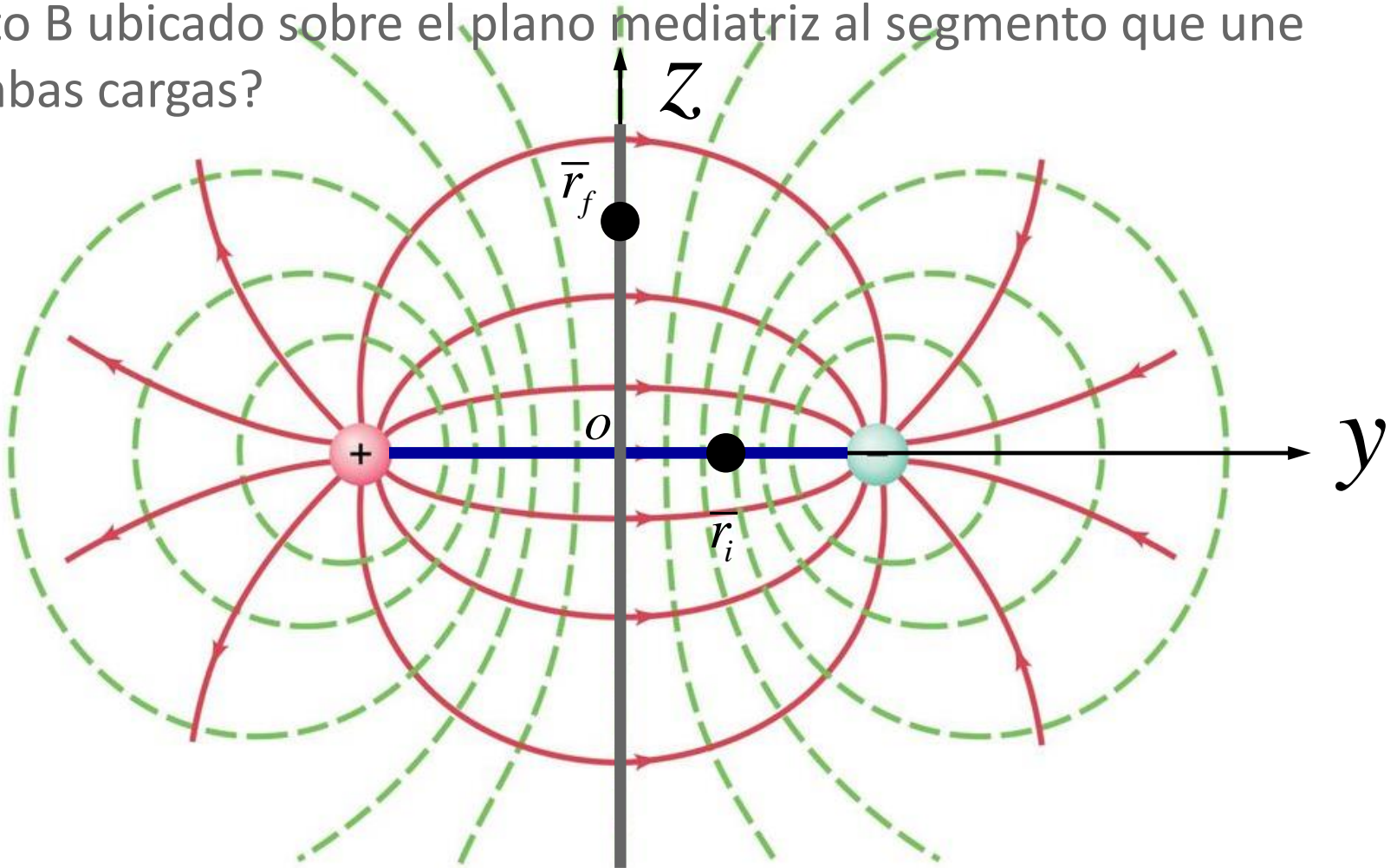
Problema 20

- d) Dibujar algunas líneas representativas de campo eléctrico
- e) Dibujar algunas equipotenciales



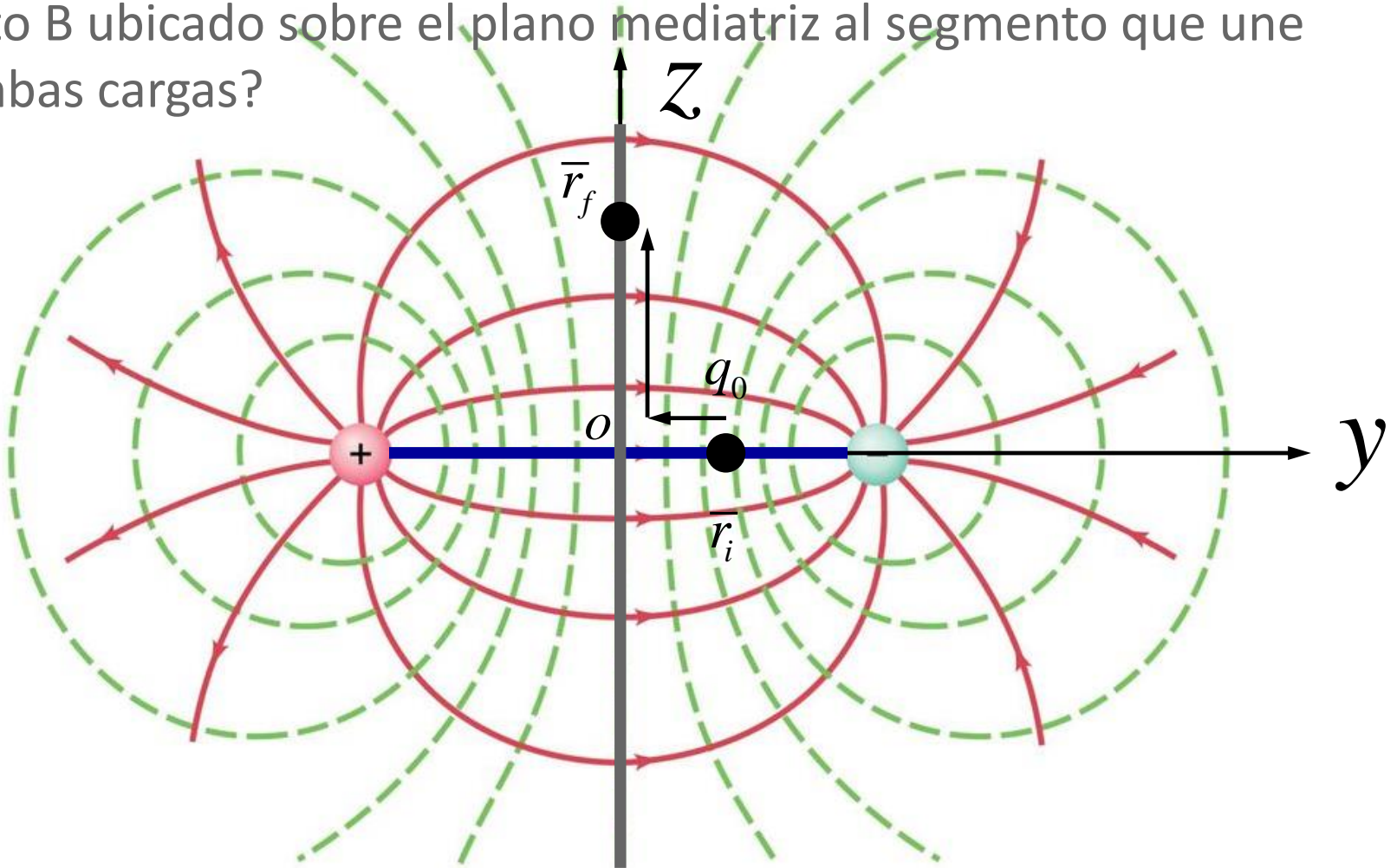
Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une a ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?



Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une a ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?



Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Para su cálculo, podemos utilizar la ecuación (5) anteriormente obtenida

– Posición inicial en el origen

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i = 0) = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (5)$$

Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Consideremos este caso en especial:

$$\vec{r}_i = \vec{0}$$

$$\vec{r}_f = y \hat{j} \quad y < d/2$$

$$W' = q_0 \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[\left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[\left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (6)$$

Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Como nuestro caso es el opuesto:

$$\vec{r}_i = y \hat{j} \quad y < d/2$$

$$\vec{r}_f = \vec{0}$$

$$W = -W' = -q_0 \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[\left(y + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[\left(y - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$